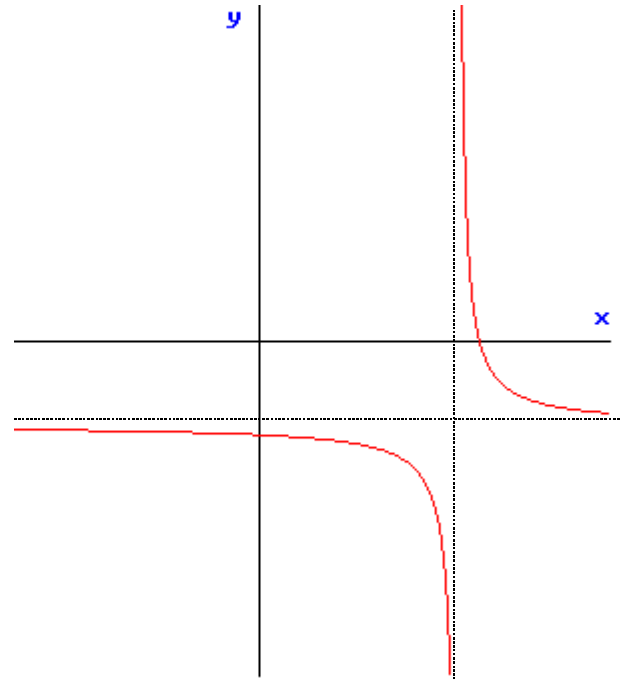


RAZIONALI FRATTE

$$n = m$$

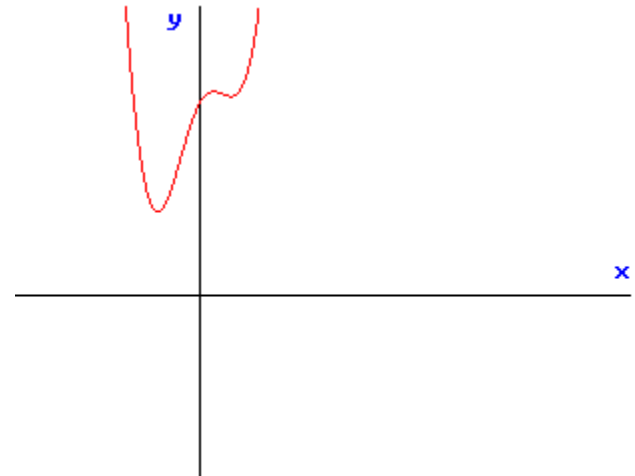
$$y = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{5 - x}{2x - 9}$$



RAZIONALI FRATTE

$$n > m$$

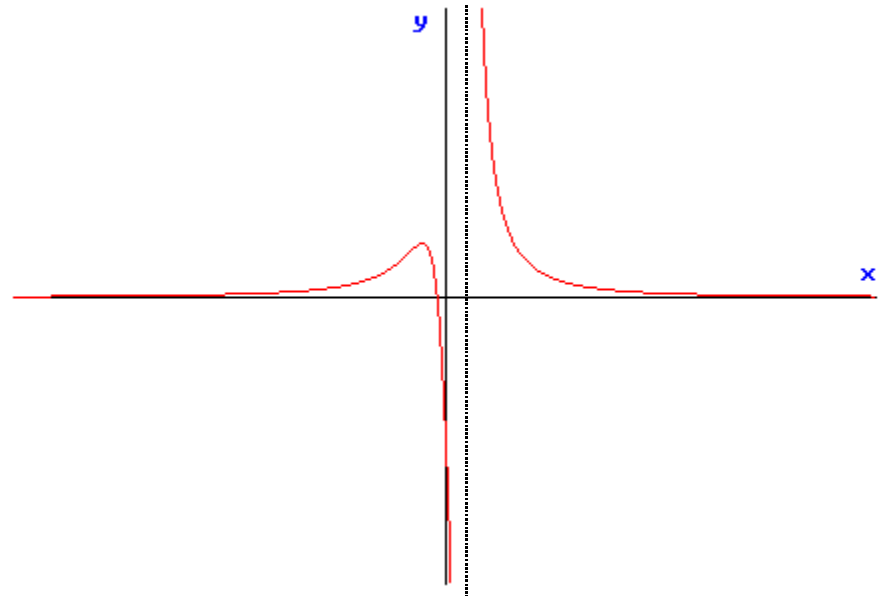
$$y = \frac{P_4(x)}{Q_2(x)} = \frac{4x^4 - 3x^2 + 2x + 4}{x^2 + 3}$$



RAZIONALI FRATTE

$$n < m$$

$$y = \frac{P_1(x)}{Q_3(x)} = \frac{5x + 2}{x^3 - x^2 + x - 1}$$



Esempio 1

$$n = m$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$



1) Determinazione del campo di esistenza (C.E.)

$$\begin{aligned} C.E. &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 2\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < -2, -2 < x < +2, +2 < x < +\infty\} \end{aligned}$$



$$x = -2, x = +2$$

asintoti verticali (A.V.)

In generale:

**Ogni funzione razionale fratta
è definita solo se
il suo denominatore è diverso da zero**



**I valori per i quali il
denominatore della funzione data si annulla
rappresentano i suoi *asintoti verticali***

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$



1) Studio del segno della funzione

$$y > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2 - 4} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 0 \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sempre (è un quadrato!)} \\ x < -2, x > +2 \end{cases}$$



- 2 + 2		
+++ +++ +	+++ - - - -	+++ +++ +
$y > 0$	$y < 0$	$y > 0$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$



1) Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x^2}{x^2 - 4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (0, 0) \equiv O$$

intersezione con l'asse y

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \frac{x^2}{x^2 - 4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B = (0, 0) \equiv A \equiv O$$

intersezione con l'asse x

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$



1) Limiti agli estremi del *C.E.*

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < -2, -2 < x < +2, +2 < x < +\infty\}$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 - 4} \right) = ???$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 - 4} \right) = ???$$

In generale:

$P_1[x]$ polinomio di grado n

$P_2[x]$ polinomio di grado m

$$y = \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_{m-1}x + b_m}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[\frac{P_1(x)}{P_2(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow \pm \infty} [P_1(x)]}{\lim_{x \rightarrow \pm \infty} [P_2(x)]} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0} & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n < m \\ \infty & \text{se } n > m \end{cases}$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{1} \right) = 1$$



la funzione data ha un *asintoto orizzontale* in $y = +1$



$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +1$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow +1$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$



1) Calcolo della derivata prima

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{D[f(x)]g(x) - f(x)D[g(x)]}{[g(x)]^2}$$



$$D\left[\frac{x^2}{x^2 - 4}\right] = \frac{D[(x^2)] \cdot (x^2 - 4) - (x^2) \cdot D[(x^2 - 4)]}{[(x^2 - 4)]^2} =$$

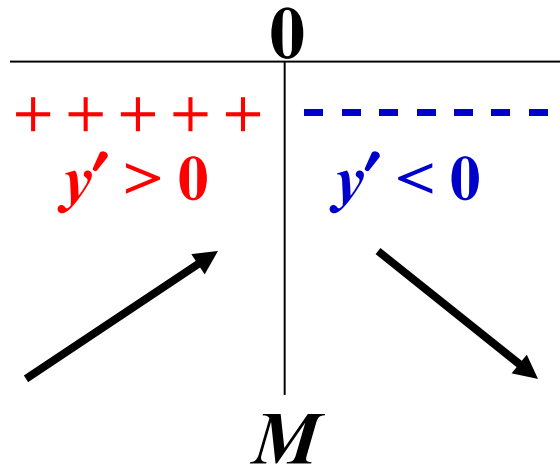
$$= \frac{2x \cdot (x^2 - 4) - x^2 \cdot (2x)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$



1) Studio del segno della derivata prima

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -8x > 0 \\ (x^2 - 4)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \text{sempre} \end{cases}$$



$$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$



$x = 0$ è un *massimo* per la funzione

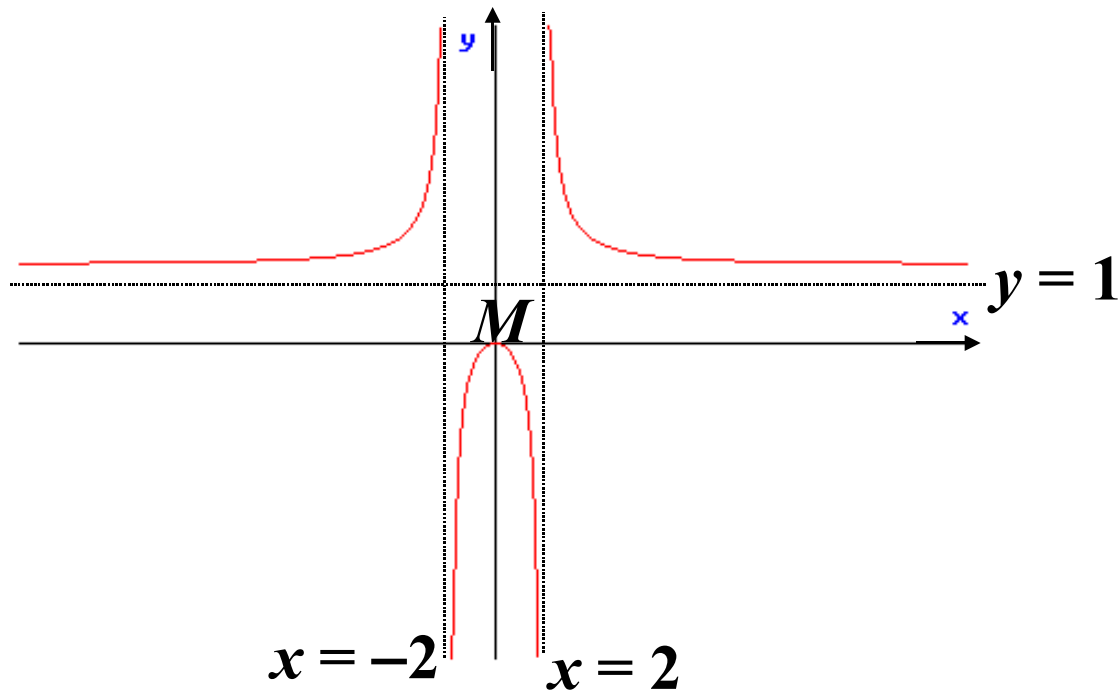


$O = (0, 0)$ è un *punto di massimo* per la funzione

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$



1) Grafico della funzione



Esempio 2

$$n > m$$

$$y = \frac{x^2 - 4}{x}$$



1) Determinazione del campo di esistenza (C.E.)

$$\begin{aligned} C.E. &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 0, 0 < x < +\infty\} \end{aligned}$$



$$x = 0$$

asintoto verticale (A.V.)

$$y = \frac{x^2 - 4}{x}$$



1) Studio del segno della funzione

$$y > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2, x > +2 \\ x > 0 \end{cases}$$



- 2 0 + 2			
+++++	-----	-----	+++++
-----	-----	+++++	+++++
-	+	-	+
$y < 0$	$y > 0$	$y < 0$	$y > 0$

$$y = \frac{x^2 - 4}{x}$$



1) Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x^2 - 4}{x} \end{cases}$$



**non ci sono intersezioni con l'asse y
(la funzione in $x = 0$ ammette A.V.!).**

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \frac{x^2 - 4}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = (-2, 0) \\ C = (+2, 0) \end{cases}$$

intersezioni con l'asse x

$$y = \frac{x^2 - 4}{x}$$



1) Limiti agli estremi del *C.E.*

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 0, 0 < x < +\infty\}$$



$$n > m$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty$$

$$y = \frac{x^2 - 4}{x}$$



la funzione data non ha *asintoti orizzontali*



$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow -\infty$$



la funzione data ha *asintoti obliqui*???

Asintoto Obliquo

$$y = mx + q$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right] \qquad q = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$$

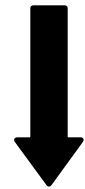


$$m = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x} \cdot \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x^2} \right) = 1$$

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x^2 - 4 - x^2}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{-4}{x} \right) = -4 \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0 \end{aligned}$$

Asintoto Obliquo

$$y = mx + q$$


$$\begin{matrix} m = 1 \\ q = 0 \end{matrix}$$

$$y = x$$

asintoto obliquo per la funzione data



**l'*asintoto obliquo* della funzione data
è proprio la bisettrice del I e III quadrante**

$$y = \frac{x^2 - 4}{x}$$



1) Calcolo della derivata prima

$$D\left[\frac{x^2 - 4}{x}\right] = \frac{D\left[(x^2 - 4)\right] \cdot (x) - (x^2 - 4) \cdot D[x]}{[x]^2} =$$

$$= \frac{2x \cdot (x) - (x^2 - 4) \cdot (1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 4}{x^2} = \frac{x^2 + 4}{x^2}$$

$$y = \frac{x^2 - 4}{x}$$



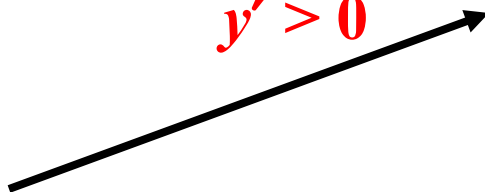
1) Studio del segno della derivata prima

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 4}{x^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4 > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \textit{sempre} \text{ (somma di quadrati!)} \\ \textit{sempre} \text{ (è un quadrato!)} \end{cases}$$

++++++
++++++

+

$y' > 0$



$$y = \frac{x^2 - 4}{x}$$



la funzione non ha né *massimi* né *minimi*

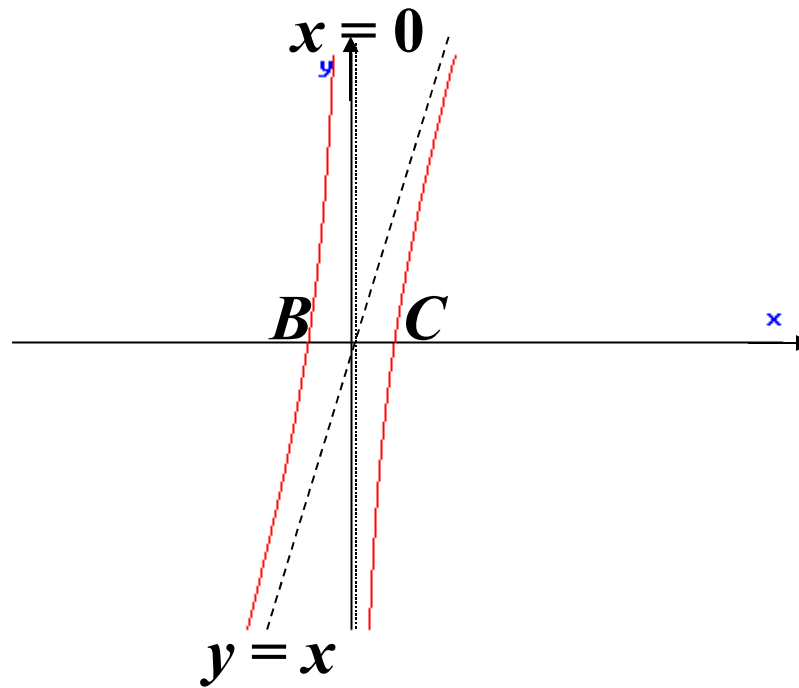


la funzione è sempre *crescente*

$$y = \frac{x^2 - 4}{x}$$



1) Grafico della funzione



Esempio 3

$$n < m$$

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$



1) Determinazione del campo di esistenza (C.E.)

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$$

($x^2 + 1 \neq 0$ sempre in quanto somma di quadrati!)



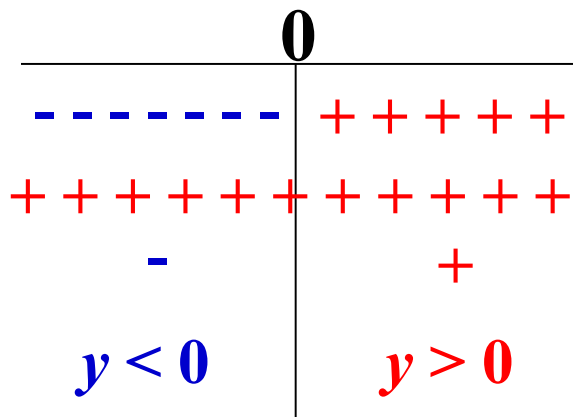
non esistono *asintoti verticali* (A.V.)

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$



1) Studio del segno della funzione

$$y > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 + 1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \text{sempre} \end{cases}$$



$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$



1) Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x}{x^2 + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (0, 0) \equiv O$$

intersezione con l'asse y

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \frac{x}{x^2 + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow B = (0, 0) \equiv A \equiv O$$

intersezione con l'asse x

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$



1) Limiti agli estremi del *C.E.*

$$C.E. = \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$$



$$n < m$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$



la funzione data ha un *asintoto orizzontale* in $y = 0$



$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow 0$$

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$



1) Calcolo della derivata prima

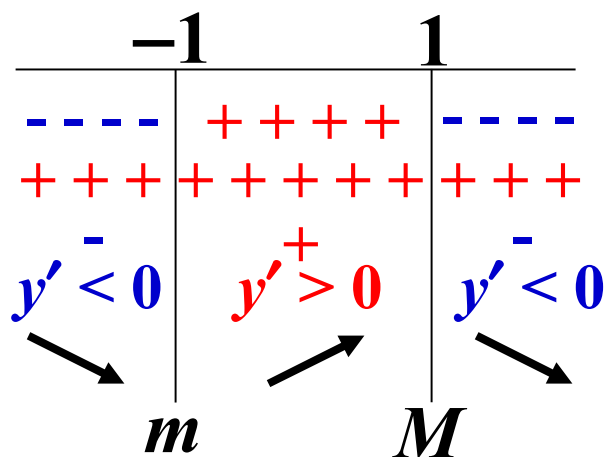
$$\begin{aligned} D\left[\frac{x}{x^2 + 1}\right] &= \frac{D[(x)] \cdot (x^2 + 1) - x \cdot D[(x^2 + 1)]}{[(x^2 + 1)]^2} = \\ &= \frac{(1) \cdot (x^2 + 1) - x \cdot (2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$



1) Studio del segno della derivata prima

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 1 > 0 \\ (x^2 + 1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ \text{sempre (è un quadrato!)} \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < +1 \\ \text{sempre} \end{cases}$$

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$



$x = -1$ è un *minimo* per la funzione

$x = +1$ è un *massimo* per la funzione



$$x = -1 \Rightarrow y = \frac{-1}{(-1)^2 + 1} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} = -0,5$$

$$x = +1 \Rightarrow y = \frac{+1}{(+1)^2 + 1} \Rightarrow y = +\frac{1}{2} = +0,5$$



$$m = \left(-1, -\frac{1}{2} \right)$$

punto di minimo

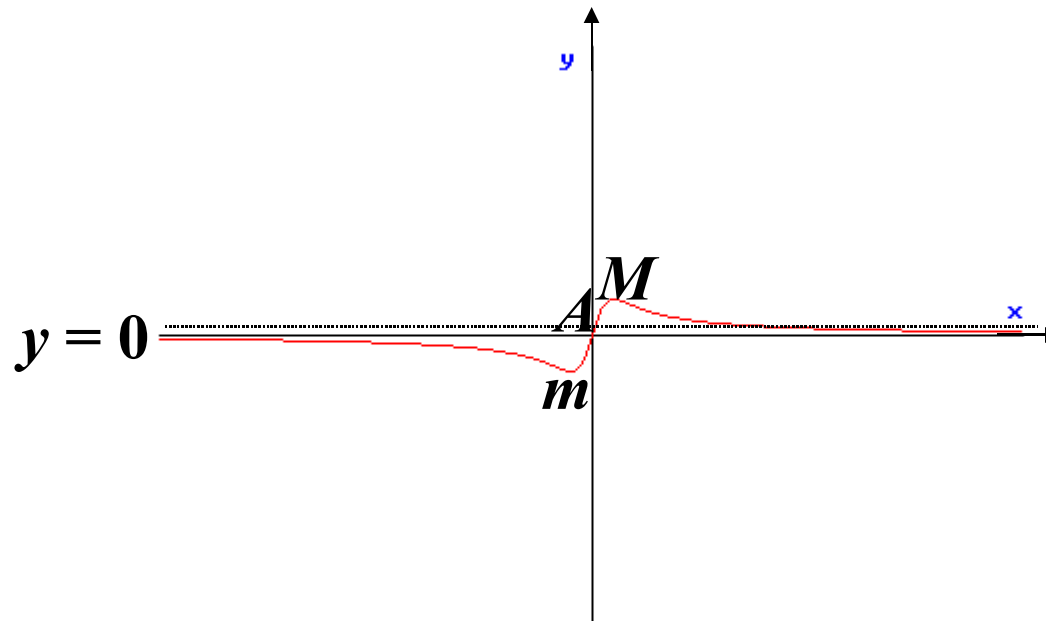
$$M = \left(1, \frac{1}{2} \right)$$

punto di massimo

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$



1) Grafico della funzione



Osservazioni!

Le funzioni razionali fratte sono definite nei punti in cui il denominatore non si annulla: in corrispondenza di tali punti la funzione presenta *asintoti verticali*

Per determinare i punti di intersezione della funzione con l'asse delle x basta eguagliare a zero il suo numeratore

Per studiare il segno della derivata prima della funzione è sufficiente studiare il segno del numeratore della derivata prima (il suo denominatore sarà sempre un quadrato proprio per la formula generale della derivata di un quoziente)